# Teorie množin

Michal Vaner

2. ledna 2013

## Obsah

***Množinou*** rozumíme každé shrnutí určitých navzájem různých předmětů $m$ našeho myšlení (které se nazývají prvky) do jednoho celku $M$.

Russelův paradox: Mějme množinu $L$ všech množin. Dále máme $K$ množinu takovou, že $m \notin m$. Je $K$ prvkem $K$? Tedy takto postavená teorie množin obsahuje spor.

Cantor pak zakázal strkání množin do množin.

Richardsův paradox: Buď $m$ přirozené číslo, které nelze definovat méně než třiceti českými slovy. Zakázalo se, aby se výrok vyjadřoval o sobě, postavení matematického jazyka.

- Písmena malé abecedy pro množiny
- Binární predikáty $\in, =$
- Logické spojky $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$
- Symboly pro kvantifikátory $\forall, \exists$
- Pomocné symboly (závorky)

Používají se zkratky.

***Formule***

- $(x \in y), (x = y)$ jsou atomické formule.
- Jsou-li výrazy $\varphi$ a $\psi$, pak i $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ a $\neg\varphi$ jsou formule.
- Je-li $x$ proměnná pro množiny a $\varphi$ formule, pak výrazy $(\forall x)\varphi$ a $(\exists x)\varphi$ jsou formule.
- Každá formule vzniká konečnou aplikací těchto pravidel.

Říkáme, že výskyt proměnné $x$ ve formuli $\varphi$ je ***vázaný***, je-li součástí nějaké podformule tvaru $(\forall x)\varphi$ či $(\exists x)\varphi$. Není-li vázaný, pak se nazývá ***volný***.

Proměnná $x$ je ***vázaná*** ve formuli $\varphi$, má-li v ní vázaný výskyt. Proměnná $x$ je ve formuli $\varphi$ volná, má-li v ní volný výskyt.

Je-li formule $\varphi$ a $x_1, x_2, \ldots, x_m$ jsou v ní volné, pak tuto skutečnost zapisujeme jako $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

***Substituce*** – mějme formuli $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Pak značí formuli, která vznikne z $\varphi$ takto:

- Každý volný výskyt nahradíme příslušnou proměnnou.

- Každý vázaný výskyt nahradíme jiným, nepoužitým písmenem.

Formule, kde jsou všechny výskyty všech proměnných vázané se nazývá uzavřená.

# 1 Axiomy teorie množin

- Axiom existence: $(\exists x)(x = x)$ – existuje alespoň jedna množina.
- Axiom extensionality: $(\forall u)((u \in x) \Leftrightarrow (u \in y)) \Rightarrow x = y$ – množiny, které mají stejné prvky, jsou stejné.
- Schéma axiomů vydělení: Je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volnou proměnnou $z$, potom formule $(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow ((x \in a) \wedge \varphi(x)))$ – je axiom teorie množin, který nazýváme axiomem vydělení pro $\varphi$. (Filtrování)
- Axiom dvojice: $(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b)))$ – Libovolné dvě množiny tvoří dvouprvkovou množinu.
- Axiom sumy: $(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (\exists y)((x \in y) \wedge (y \in a)))$ – Ke každé množině existuje množina všech prvků, náležející nějakému prvku množiny $a$.
- Axiom potence: $(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (x \subseteq a))$ – Ke každé množině existuje množina všech podmnožin.
- Schéma axiomů nahrazení: Je-li $\varphi(u, v)$ formule, která neobsahuje volné proměnné $w$ a $z$, potom formule $(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\varphi(u, v) \wedge \varphi(u, w)) \Rightarrow (v = w)) \Rightarrow (\forall a)(\exists z)(\forall v)((v \in z) \Leftrightarrow (\exists u)((u \in a) \wedge \varphi(u, v)))$ je axiomem teorie množin. Zobrazení na množinu.
- Axiom nekonečna: $(\exists z)(\emptyset \in z) \wedge (\forall x)((x \in z) \Rightarrow (x \cup \{x\} \in z))$ – existuje nekonečná množina.
- Axiom fundovanosti/regularity:

$$(\forall a)((a \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x)((x \in a) \wedge (x \cap a = \emptyset)))$$

## 1.1 Axiom extensionality

Když mají množiny stejné prvky, pak jsou stejné. Stačí implikace, druhý směr platí z logiky.

(Příklad s králikářema a hasičema, který jsou stejný.)

Říkáme, že množina $x$ je ***podmnožinou*** množiny $y$ ($x \subseteq y$), jestliže platí, $(\forall t)(t \in x \Rightarrow t \in y)$. Říkáme, že $x$ je ***vlastní podmnožinou*** ($x \subset y$), pokud platí $(x \subseteq y) \wedge (x \neq y)$.

**Lemma 1** *Vždy platí, že*

- $x \subseteq x$
- $\neg (x \subset x)$
- $(x \subseteq y \wedge y \subseteq z) \Rightarrow (x \subseteq z)$
- $(x \subset y \wedge y \subseteq z) \Rightarrow (x \subset z)$
- $(x \subseteq y \wedge y \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$
- $(x \subset y \wedge f \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$
- $(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \Rightarrow (x = y)$

## 1.2 Schéma axiomů vydělení

Nesmí obsahovat volné proměnné, aby nedocházelo ke sporům, např. kdybychom si zvolili $\varphi(x) := x \notin z$.

Množina $z$ je axiomem vydělení pro $\varphi$ určená jednoznačně. Plyne z axiomu extenzionality.

### 1.2.1 Speciální volby $\varphi(x)$

- $\varphi(x) := x \in b - z$ je ***průnik***, značí se $a \cap b$.
- $\varphi(x) := x \notin b - z$ je ***rozdíl***, značí se $a \setminus b$.
- $\varphi(x) := x \neq x - z$ je ***prázdná množina***, $\emptyset$. Její existence dokázána z axiomů.
$$(\forall x)(x \notin \emptyset)$$

Řekneme, že množiny $a, b$ jsou ***disjunktní***, pokud $a \cap b = \emptyset$.

**Lemma 2**
- $\neg(\exists y)(y \in \emptyset)$
- $(\forall x)(\emptyset \subseteq x)$
- $x \subseteq \emptyset \Leftrightarrow x = \emptyset$

**Věta 1**

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \in z)$$

Důkaz:
Sporem. Nechť tedy existuje. Uvažujme formuli $\varphi(x) := x \notin x$. Máme podle axiomu vydělení pro $\varphi$ množinu $z_\varphi$. Podle předpokladu $z_\varphi \in z_\varphi$. Z toho vyjde spor, tedy původní předpoklad neplatí.

☻

(Paradox původní teorie množin, zde jen zabraňuje existenci některých množin.)

## 1.3 Axiom dvojice

Jsou-li $a, b$ množiny, pak množinu sestávající z prvků $a, b$ nazveme ***neuspořádanou dvojicí*** množin $a, b$ a značíme ji jako $\{a, b\}$.

Nic nezakazuje mít $a = a$, pak ovšem $\{a, a\} = \{a\}$, jednoprvková množina.

**Lemma 3**
- $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x = y$
- $\{x\} = \{x, y\} \Leftrightarrow x = y$
- $\{x, y\} = \{u, v\} \Leftrightarrow ((x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u))$

***Uspořádaná dvojice*** množin $a, b$ je množina $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, značíme ji jako $\langle a, b \rangle$.

**Lemma 4** $\langle a, b \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow (a = u \wedge b = v)$.

$k \in \mathbb{N}^+$ a $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou množiny. Potom ***uspořádaná $k$-tice vypadá takto***: $\langle a_1 \rangle = a_1$, $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \rangle = \langle \langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1} \rangle, a_k \rangle$.

## 1.4 Axiom sumy

Zplošťuje jako v perlu. Značí se $\bigcup a$ nebo $\{y | y \in b\}$

**Lemma 5** *Buď $a = \{b, c\}$. Pak $\bigcup a = \{x | x \in b \vee x \in c\}$.*

Značíme to $b \cup c$ a říkáme tomu ***sjednocení***.

***Neuspořádaná $k$-tice*** je

$$\begin{aligned} \{a, b, c\} &= \{a, b\} \cup \{c\} \\ \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} &= \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\} \cup \{a_k\} \end{aligned}$$

Pro neprázdnou množinu $a$ máme průnik $\bigcap a = \{x | (\forall b)(b \in a \Rightarrow x \in b)\}$.

## 1.5 Schéma axiomů nahrazení

$\psi$ je funkce (to je ta první podmínka). Tento axiom potom říká, že existuje obraz množiny.

$w$ je zakázané, aby nebyl problém při substituci, $z$ dělá problémy jako u axiomu nahrazení.

$a, b$ jsou množiny. ***Kartézský součin*** $a \times b$ množin $a, b$ je množina $a \times b := \{\langle u, v\rangle \,| u \in a \wedge v \in b\}$. Existence se dokáže postupným „poskládáním“ třeba z řádků.

Důkaz:
Zvolme (zafixujme) $y \in b$. Definujme $\psi(x, v) \Leftrightarrow v = \langle x, y\rangle$. Potom $\psi$ splňuje podmínku axiomu nahrazení. ($\psi(x, v) \wedge \psi(x, w) \Rightarrow v = \langle x, y\rangle \wedge w = \langle x, y\rangle \Rightarrow v = w$) Použijeme $\psi$ na množinu $a$ a zjístíme, že $\{\langle x, y\rangle \,| x \in a\}$ je množina $h_y$. Teď již pro obecné $y$ definujeme $\psi'(y, h_y)$). Opět splňuje podmínku axiomu nahrazení a tak ji použijeme na $b$. Dostaneme, že $\bigcup \{h_y | y \in b\}$ je množina a značíme ji $\{\langle u, v\rangle \,| u \in a \wedge v \in b\}$. Teď ještě formálně dokázat, že $\langle x, y\rangle$ je prvkem $a \times b$ a nic jiného není...

☻

***Binární relace*** je množina $R$, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice.

***Definiční obor relace*** $dom(R)$ (puvodně $df(R)$) $\{x | (\exists y)\,(\langle x, y\rangle \in R)\}$.

***Obor hodnot*** $rng(R)$ (původně $sug(R)$) $\{y | (\exists x)\,(\langle x, y\rangle \in R)\}$.

Oboje z toho je množina a $R \subseteq dom(R) \times rng(R)$.

Inverzní relace $R^{-1}\,\{\langle y, x\rangle \,|\, \langle x, y\rangle \in R\}$.

Jsou-li $R, S$ relace, pak ***složení relací*** $S \circ R$ je relace $\{\langle x, z\rangle \,|\, (\exists y)\,(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S)\}$.

Skládání relací je asociativní a $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Množina $f$ se nazývá ***funkce***, je-li $f$ relace, pro kterou platí
$(\forall x \in dom(f))\,(y \in rng(f) \wedge y' \in rng(f) \wedge \langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, y'\rangle \in f) \;\Rightarrow\; y = y'$.

Značení $f : A \to B$ označuje, že $f$ je funkce, $A = dom(f), rng(f) \subseteq B$. Je-li $f : A \to B$ funkce, $x \in a$, pak $f(x)$ označuje jediné $y \in B, \langle x, y\rangle \in f$.

$f : A \to B, C \subseteq A$ potom zůžení $f \restriction C = f \cap (C \times B)$.

Obor množiny $C$ je obor hodnot tohoto zůžení. Někdy se zapisuje předpisem jako $f = \langle f(x) | x \in C\rangle$.

`TODO: Já tu mám, že je to něco jiného` $f'' = \langle f(x) | x \in C\rangle$

Funkce $f : A \to B$ se nazývá ***prostá***, je-li $f^{-1}$ funkce.

$f : A \to B$ se nazývá ***surjektivní***, je-li $B = rng(f)$.

$f : A \to B$ se nazývá ***bijekce***, je-li současně prostá a surjektivní.

***Ostře uspořádaná množina*** je dvojice $\langle a, r\rangle$, kde $a$ je množina, $r \subseteq a \times a$ a $r$ splňuje následující pro $\forall x, y, z$.

- $(\langle x, y\rangle \in r \wedge \langle y, z\rangle \in r) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in r$ (Tranzitivita)
- $\langle x, x\rangle \notin r$ (Antireflexivita)

Ostré uspořádání nazveme ***lineární***, jestliže $(\forall x, y \in a)\,(\langle x, y\rangle \in r \vee \langle y, x\rangle \in r \vee x = y)$. Jestliže není lineární, pak existují $r$-neporovnatelné prvky.

Jestliže $R, S$ jsou relace, $R \subseteq a \times a, S \subseteq b \times b$, pak řekneme, že dvojice $\langle a, R\rangle$ je ***izomorfní*** s dvojicí $\langle b, S\rangle$, pokud existuje bijekce $f : a \to b$ taková, že $(\forall x, y \in a); \langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle \in S$. Zobrazení $f$ se nazývá ***izomorfizmus***.

Mějme $\langle a, r\rangle$ uspořádanou množinu, $x, y \in a$. Budeme psát, že $xry \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in r$ nebo $x < y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in r$.

Je-li $r$ uspořádání $a$ a $m \subseteq a$, řekneme, že $x \in a$ je ***nejmenší prvek množiny*** $m$, pokud pokud $x \in m \wedge (\forall y)(y \in m \Rightarrow x = y \vee xry)$.

Řekneme, že uspořádání $r$ na množině $a$ je ***dobré***, jestliže každá neprázdné $m \subseteq a$ má nejmenší prvek.

*Poznámka:*
Každé dobré uspořádání je lineární.

Důkaz:
Zvolme $x, y \in a, x \neq y$, položme $m = \{x, y\}$. Máme $m$ neprázdné, tedy $m$ obsahuje nejmenší prvek, tedy prvky $x, y$ jsou porovnatelné.

Je-li $\langle a, r\rangle$ uspořádaná množina a $x \in a$, pak budeme značit $(\leftarrow, x)$ množinu $\{y; y \in a \wedge yrx\}$ a nazývá se ***počáteční úsek určený prvkem*** $x$. $(\leftarrow, x)$ budeme uvažovat s uspořádáním $r$.

☻

**Lemma 6** *Je-li $\langle a, r\rangle$ dobře uspořádaná množina a $x \in a$, potom $\langle a, r\rangle$ není izomorfní s $\langle (\leftarrow, x), r\rangle$.*

Důkaz:
Sporem. Nechť máme izomorfizmus $f : a \to (\leftarrow, x)$. Označme $m = \{y \in a | f(y) \neq y\}$. $m \neq \emptyset$, protože se někam musí zobrazit $x$. Množina $a$ je dobře uspořádaná, tedy $(\exists t \in m)$, že $t$ je $r$-nejmenší prvek množiny $m$. Tedy, $f(t) \neq t$ a $(\forall v \in a)\,(vrt \Rightarrow f(v) = v)$.

Tedy, máme dvě možnosti: $f(t)rt$. Položíme $v = f(t)$, máme $vrt$, tedy $v \neq t$. Protože $vrt$, pak $f(v) = v$, tedy, není to prosté. Druhá možnost je, že $trf(t)$. $t \in (\leftarrow, x)$. Kdykoliv $v \in a, vrt, f(v) = v \neq t$. (Před $t$ jde všechno dolů.) Kdykoliv $v \in a, trv$, zachovává uspořádání, $f(t)rf(v), f(v) \neq t$. $f(t) \neq t$, tedy $f$ není surjektivní.

☻

**Lemma 7** *Jsou-li $\langle a, r\rangle, \langle b, s\rangle$ dvě izomorfní, dobře uspořádané množiny, pak mezi nimi existuje jediný izomorfizmus.*

Důkaz:
Sporem. Předpokládejme, že $f, g$ jsou dva různé izomorfizmy. Množina $m = \{y | y \in a \wedge f(y) \neq g(y)\}$ je neprázdná. $a$ je dobře uspořádaná, potom $m$ má nejmenší prvek $t$. Kdykoliv $yrt$, je $f(y) = g(y)$, ale $f(t) \neq g(t)$.

Máme 2 případy. $f(t)sg(t)$ a naopak, oba jsou převoditelné přeznačením. Předpokládejme tedy, že $f(t)sg(t)$. Musí ale existovat něco, co se v $g$ zobrazí na $f(t)$, tedy $g(y_0) = f(t)$, ale dle izomorfizmu $y_0st$, ale pak $f(y_0) = g(y_0)$, tedy $g$ není prosté.

☻

**Věta 2** *Buď $\langle a, r\rangle, \langle b, s\rangle$ dvě dobře uspořádané množiny. Pak nastává právě jedna z následujících možností:*

- *$\langle a, r\rangle$ je izomorfní s $\langle b, s\rangle$*
- *$\exists x \in a$, že $\langle (\leftarrow, x), r\rangle$ je izomorfní s $\langle b, s\rangle$*
- *$\exists x \in b$, že $\langle (\leftarrow, x), s\rangle$ je izomorfní s $\langle a, r\rangle$*

Důkaz:
Značme $a$ je izomorfní s $b$ jako $a \cong b$.

$$f := \{\langle v, w\rangle | v \in a, w \in b \wedge \langle (\leftarrow, v), r\rangle \cong \langle (\leftarrow, w), s\rangle\}$$

Máme $f \subseteq a \times b$. $f$ je tedy dle vydělení množina, $f$ je zobrazení. $\langle v, w\rangle \in f, \langle v, w'\rangle \in f$. Z lemma 1 $w = w'$.

$f$ je prosté zobrazení (jen se to vezme pozpátku).

$f$ i $f^{-1}$ zachovává uspořádání, zřejmé z definice.

Toto zobrazení je zmíněný izomorfizmus. Jen je potřeba dokázat, že tam padle alespoň celá jedna množina. Vezmněme si tedy nejmenší prvek, který netvoří izomorfizmus v každé množině, prvky $o, l$.

Aby nenastal ani jeden z případů, musí být jako $o$, tak $l$ definovány. Máme ty dva počáteční úseky a jejich hranice. Ale hranice se na sebe dají zobrazit.

☻

## 2 Ordinály

Množina $x$ se nazývá ***tranzitivní***, jestliže platí $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$, nebo ekvivalntně $(\forall y)(\forall z)((y \in x \wedge z \in y) \Rightarrow z \in x)$.

Množina $x$ se nazývá ***ordinál***, je-li tranzitivní a dobře uspořádaná pomocí $\in$.

**Věta 3 (O ordinálech)**

1. *Je-li $x$ ordinál a je-li $y \in x$, pak $y$ je ordinál a $y = \langle (\leftarrow, y), \in \rangle$.*
2. *Jsou-li $x, y$ ordinály a $x \cong y$, pak $x = y$*
3. *Jsou-li $x, y$ ordinály, pak platí právě jedna z následujících možností:*
   - $x \in y$
   - $y \in x$
   - $x = y$
4. *Jsou-li $x, y, z$ ordinály, $x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z$*
5. *Je-li $C \neq \emptyset$ množina ordinálů, pak $(\exists x \in C)(\forall y \in C)(x \in y \vee x = y)$.*

Důkaz:
1) $x$ je ordinál, dokážeme, že $y$ je tranzitivní. Zvolme libovolně $t \in y, z \in t$, víme, že $x$ je tranzitivní. $t \in y \wedge y \in x$. Protože $x$ je tranzitivní, $t \in x$. $x$ je tranzitivní, proto $z \in x$.

Tedy $y, z, t \in x, t \in y, z \in t$. $\in$ je uspořádání na $x$, tedy $z \in y$.

Na množině $y$ je relace $\in$ uspořádání. Nechť tedy $u, v, w \in y$. Předpokládejme, že $u \in v, v \in w$. $x$ je tranzitivní množina a $y \in x$, pak i $u, v, w \in x$. Množina $x$ je relací $\in$ uspořádaná, pak $u \in w$.

$\langle y, \in \rangle$ je dobře uspořádaná. Buď $C \subseteq y$, $C \neq \emptyset$. $y \in x$, $(\forall t \in C)(t \in y)$, $x$ tranzitivní, $C \subseteq x, C \neq \emptyset \wedge \langle x, \in \rangle$ dobře uspořádaná, existuje $u \in C$ nejmenší prvek množiny $C$, tedy má nejmenší prvek v $C \subseteq y$.

$x$ ordinál, $y \in x$. $t \in \langle (\leftarrow, y), \in \rangle \Leftrightarrow t \in y$.

2) Nechť $x, y$ ordinály a existuje izomorfizmus $h$ mezi nimi. Kdybychom měli, že $y = \{z | z \in x\}$, pak to jen znamená, že $x = y$.

Ale $y = \{h(z)|z \in x\}$. Vezměme si $m = \{z|z \in x \wedge h(z) \neq z\}$. Chtěli bychom, aby byla prázdná.

Nechť tedy $m \neq \emptyset$. Protože $x$ je dobře uspořádaná, tak množina $m$ má nejmenší prvek $t$. Kdykoliv $z \in t$, pak $h(z) = z$. $h(t) = \{h(z); z \in t\}$. Tedy, neliší se v žádné své podmnožině. Spor s tím, že se liší.

3) Mějme $x, y$ dva ordinály. Podle věty o dobře uspořádaných množinách buď $x \cong y \Rightarrow x = y$. Nebo je izomorfní s počátečním úsekem (buď jedním nebo druhým směrem), tedy se s ním opět rovná.

4) $z$ je ordinál, tedy tranzitivní množina, $y \in z$ a $x \in y$, tedy $x \in z$.

5) Mějme $C \neq \emptyset$ množinu ordinálů. Existuje $t \in C$, vybereme libovolně. Pokud platí, že $(\forall y \in C)(y = t \vee t \in y)$. Potom je $t$ nejmenší prvek množiny $t$. Pokud platí, že $(\exists y)(y \in C \wedge y \in t)$. Pak vezmu $m = \{y \in C; y \in t\} \neq \emptyset$. $t$ je ordinál, tedy existuje $x$ nejmenší prvek množiny $m$ a $x$ je nejmenší prvek množiny $C$.

☻

**Věta 4**

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \textit{ je ordinál } \Rightarrow x \in z)$$

Tedy, neexistuje množina všech ordinálů.

Důkaz:
Sporem. Kdyby existovalo, tak $z$ je tranzitivní, dobře uspořádaná, tedy $z$ je ordinál a tedy obsahuje sám sebe. Pro žádný ordinál neplatí, že $x \in x$.

☻

**Lemma 8** *Je-li a množina ordinálů a platí-li* $(\forall x \in a)(\forall y \in x)(y \in a)$, *pak a je ordinál.*

Důkaz:
$a$ je tranzitivní. Každé dva ordinály lze porovnat dle věty o ordinálech. Antireflexivita 3), tranzitivita 4) existence nejmenšího prvku 5).

☻

**Věta 5 (Věta o izomorfizmu dobře uspořádané množiny a ordinálu)** *Je-li* $\langle a, r\rangle$ *jakákoliv dobře uspořádaná množina, pak existuje právě jeden ordinál c tak, že* $\langle a, r\rangle \cong \langle c, \in\rangle$.

Důkaz:
Jednoznačnost: Buď $c, d$ ordinály, předpokládejme, že $\langle a, r\rangle \cong \langle c, \in\rangle \wedge \langle a, r\rangle \cong \langle d, \in\rangle$. Složíme a dostáváme, že $\langle c, \in\rangle \cong \langle d, \in\rangle$. Podle věty o ordinálech jsou si rovny.

Existence: Položme $b = \{e | e \in a \wedge (\exists x)(x \text{ je ordinál } \wedge \langle x, \in\rangle \cong \langle (\leftarrow, e), r\rangle)\}$.

Definujme $f(a) = x$, $x$ je ordinál a $\langle (\leftarrow, a), r)\rangle \cong x$. Je-li $\varphi$ formule $\langle (\leftarrow, a), r)\rangle \cong x$, pak z axiomu nahrazení pro $\varphi$ je $c = rng(f)$ množina. Tedy $f$ je izomormfizmus $b \to c$ a $c$ je ordinál díky lemma 3.

Pokud $b = a$ máme hodotovo. Pokud $a \setminus b$ je neprázná množina, pak má díky dobrému uspořádání $\langle a, r\rangle$ nejmenší prvek $b_1$. Platí $\langle (\leftarrow, b_1), r)\rangle \cong \langle b, r\rangle) \cong \langle c, \in\rangle)$, tedy $f(b_1) = c$ podle definice $b$, tedy $b_1 \in b$ spor.

☻

Je-li $\langle a, r\rangle$ dobře uspořádaná množina, ***typ*** $\langle a, r\rangle$ je jediný ordinál $c$, že $\langle a, r\rangle \cong c$.

Ordinály budeme značit malými řeckými písmeny.

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta, \alpha \leq \beta \Leftrightarrow (\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta)$$

.

Je-li $X$ množina ordinálů, označme ***sup*** $X = \bigcup X$. Pokud $X \neq \emptyset$, označme ***min*** $X = \bigcap X$.

**Lemma 9** *1. Pro ordinály $\alpha, \beta, \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.*

*2. Je-li $X$ množina ordinálů, pak $\sup X$ je nejmenší ordinál, který větší nebo roven všem prvkům množiny $X$.*

*3. Je-li $X$ neprázdná množina ordinálů, pak $\min X$ je nejmenší prvek množiny $X$.*

Důkaz:
1) triviální.

2) $\bigcup X$ je množina. Z axiomu sumy.

$\bigcup X$ je tranzitivní množina. Je-li $x \in \bigcup X$ a $y \in x$, pak ze sumy $\exists t \in X$, že $x \in t$ a $t$ je ordinál. Díky tranzitivitě $y \in t$ a opět díky sumě $y \in \bigcup X$.

$\bigcup X$ je ordinál díky lemma 3.

$\bigcup X$ je větší než všechny ordinály z množiny $X$. Zvolme libovolně $t \in X$. Podle věty o ordinálech 3) je buď $t = \bigcup X \vee t \in \bigcup X$ což chceme nebo $\bigcup X \in t$, ale v tom případě $\bigcup X \in t \wedge t \in X$ a z axiomu summy $\bigcup X \in \bigcup X$, což je spor s tím, že $\bigcup X$ je ordinál.

$\bigcup X$ je nejmenší horní mez. Nechť $t \in \bigcup X$ je libovolné, ukážeme, že $t$ není horní mez. Podle axiomu sumy $\exists y \in X$, žé $t \in y$. Tedy toto $y$ je svědek, že $t$ není horní mezí.

3) $\bigcap X$ je množina. Z axiomu vydělení.

$\bigcap X$ je ordinál. Je-li $t \in \bigcap X$ pro libovolné $x \in \bigcap X$, pak $t$ je ordinál a $t \in x$, proto díky lemma 3 je $\bigcap X$ ordinál.

$\bigcap X$ je menší než všechny prvky z $X$. Z definice $\bigcap$.

$\bigcap X \in X$. $X$ je neprázná množina ordinálu. Podle věty o ordinálech 5) má nejmenší prvek $y$. Dokáži, že $y = \bigcap X$. $y$ je nejmenší prvek $X$, tudíž pro $z \in X, z \neq y$ je $y \in x$. Pro každý $y_0 \in y$ tedy z tranzitivity $y_0 \in z$ tedy $y_0 \in \bigcap X$. Proto $y \subset \bigcap x$, opačná inkluze je zjevná tedy $\bigcap X = y$.

☻

Pro ordinál $\alpha$ je ***ordinální následník*** ordinál $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

**Lemma 10**

- *Je-li $\alpha$ ordinál, pak $S(\alpha)$ je ordinál.*
- $\alpha < S(\alpha)$
- $(\forall \beta)\beta < S(\alpha) \Leftrightarrow \beta \leq \alpha$

Ordinál $\alpha$ se nazývá ***izolovaný***, pokud $\exists \beta$, že $\alpha = S(\beta)$ nebo $\alpha = \emptyset$.

Pokud $\alpha \neq 0$ není izolovaný, pak se nazývá ***limitní.***

Ordinál $\alpha$ je ***přirozené číslo***, jestliže $(\forall \beta)(\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta$ je izolovaný).

## 2.1 Axiom nekonečna

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow S(y) \in x))$$

Tato množina určitě obsahuje všechna přirozená čísla.

Důkaz:
Těžký. Sporem. Mějme $n \in \mathbb{N} \wedge n \notin x$ libovolné. $n$ je přirozené tudíž $\exists m n = S(m)$ a $m$ je ordinál. Pokud $m \in x$, tak spor s vlastností $x$. Pokud $m \notin x$. $n$ je ordinál proto množina $\{l | l \in n \wedge l \notin x\}$ má nejmenší prvek $n_1$. $n_1 = S(m_1)$, ale $m_1 \in x$. Spor s definicí $x$.

Tedy, můžeme vydělit množinu všech přirozených čísel. Označme ji $\omega$.

$\omega$ je ordinál, neboť je tranzitivní množinou ordinálů.

☻

*Poznámka:*
Všechny ordinály menší než $\omega$ jsou izolované, zatímco $\omega$ je limitní ordinál (Kdyby ne, pak by $\omega \in \omega$). Tedy, $\omega$ je nejmenší limitní ordinál.

**Věta 6 (Peanovy axiomy teorie přirozených čísel)** *1.* $0 \in \omega$

*2.* $(\forall n \in \omega)(S(n) \in \omega)$

*3.* $(\forall n, m \in \omega)(n \neq m \Rightarrow S(n) \neq S(m))$

*4.* *Axiom indukce:*
$(\forall x)(x \subseteq \omega \Rightarrow (0 \in x \wedge (\forall n)(n \in x \Rightarrow S(n) \in x)) \Rightarrow x = \omega$

Důkaz:
U nás vynechal. První až třetí plyne z věty o ordinálech.

Čtyřka sporem. $x \neq \omega$, tedy $\omega \backslash x \neq \emptyset$, $\omega$ je ordinál, tedy existuje $n \in \omega \backslash x$, n je nejmenší prvek množiny $\omega \backslash x$. Nastávají tyto možnosti:

- $n = 0$ – spor s jedničkou
- $n = S(m)$ pro nějaké $m$, $m \in x$, spor s dvojkou.

Buď $\alpha, \beta$ ordinály. ***Ordinální součet*** $\alpha + \beta$ je typ $\langle \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R \rangle$, $R$ je lexikografické uspořádání zprava.

☻

**Lemma 11** *Pro libovolné ordinály $\alpha, \beta, \gamma$ platí:*

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + 1 = S(\alpha)$
- $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$
- *Je-li $\beta$ limitní ordinál, pak* $\alpha + \beta = \sup \{\alpha + \xi | \xi < \beta\}$

Důkaz:
Z definice. Stačí ukázat izomorfizmus rovnost z toho plyne.

☻

Nemusí obecně platit, že je sčítání komutativní. př $1 + \omega \neq \omega + 1$ protože $\mathbb{N} \neq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Buď $\alpha, \beta$ ordinály. ***Ordinální součin*** $\alpha \cdot \beta = \langle \beta \times \alpha, <_{LEX} \rangle$.

**Lemma 12** *Pro libovolné ordinály $\alpha, \beta, \gamma$ platí:*

- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot 1 = \alpha$
- $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
- *Je-li $\beta$ limitní ordinál, pak* $\alpha \cdot \beta = \sup \{\alpha \cdot \xi; \xi < \beta\}$
- $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Není obecně komutativní. př. $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ a $\omega \cdot 2 = \omega$

## 2.2 Kardinály

Buďte $a, b$ množiny. Řekněme, že mohutnost množiny $a$ menší nebo rovno mohutnosti množiny $b$, pokud existuje prosté zobrazení $a \to b$. $a \preccurlyeq b$.

Řekněme, že mohutnost množiny $a$ je rovna mohutnosti množiny $b$, pokud mezi nimi existuje bijekce. $a \approx b$.

Říkáme, že mohutnost množiny $a$ je ostře menší než množiny $b$, pokud $a \preccurlyeq b \wedge a \not\approx b$, značíme $a \prec b$.

**Lemma 13** *1.* $x \approx x$

*2.* $x \approx y \Rightarrow y \approx x$

*3.* $(x \approx y \wedge y \approx z) \Rightarrow x \approx z$

*4.* $x \preccurlyeq x$

*5.* $(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z) \Rightarrow x \preccurlyeq z$

Důkaz:
1., 4. za zobrazení zvolíme identitu

2. 3. inverze a složení bijekcí je bijecke

5. napojení zobrazení

☻

**Věta 7 (Cantor-Bernstein)**

$$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow a \approx b$$

Důkaz:
$f$ je prosté $a \to b$, $g$ je prosté $b \to a$.

Pokud je jedno z nich na, tak je hotovo. Tedy předpokládejme, že tomu tak není.

`TODO: Tady schází obrázek`

Definuji $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = g[b_n]$, $b_{n+1} = f[a_n]$, $a_\omega = \bigcap\{a_n | n \in \omega\}$, $b_\omega = \bigcap\{b_n | n \in \omega\}$.

Všimnu si, že $f()$ je na $a_{2k}$, prostá a $g()$ je prostá na $b_{2k}$.

Definuji $h : a \to b$ takto:

- $h(x) = f(x)$ pro $x \in a_\omega \cup \bigcup a_{2n} \setminus a_{2n+1}$
- $h(x) = t$ pro to jediné $t$ takové, že $g(t) = x$ pro $x \in \bigcup a_{2n-1} \setminus a_{2n}$

$dom(f) = a$. Mějme $x \neq y$ rozliším případy podle do jakého $a_k$ padnou a pak je to triviální.

$f()$ je bijekce. Zvlášť v lichých a sudých $a_k$. V $a_\omega$ je na, protože jinak by to bylo spor s definicí $a_\omega$

☻

Buď $A$ množina. Pokud lze $A$ dobře uspořádat, buď $|A|$ nejmenší ordinál $\alpha$, pro který $A \approx \alpha$ a nazveme ho ***mohutností množiny*** $A$.

Ordinál $\alpha$ se nazývá ***kardinál***, pokud $\alpha = |\alpha|$.

Ordinál $\alpha$ je kardinál $\Leftrightarrow (\forall \beta)\, (\beta < \alpha \Rightarrow \beta \not\approx \alpha)$.

**Lemma 14** *Buďte $\alpha, \beta$ ordinály. Je-li $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha \Rightarrow |\beta| = |\alpha|$.*

Důkaz:
$\beta \subseteq \alpha \Rightarrow \beta \preccurlyeq \alpha$.

Ale $\alpha \approx |\alpha|$ a $|\alpha| \subseteq \beta$, tedy $\alpha \preccurlyeq \beta$. Už jen použijeme Cantor-Bernstein.

☻

**Lemma 15** *Je-li $n \in \omega$, pak*

1. $n \not\approx n + 1$ *– důkaz indukcí.*
2. $(\forall \alpha)(\alpha \approx n \to \alpha = n)$ *– minulé lemma a* 1.

Důkaz:
$\omega$ je kardinál a každé $n \in \omega$ také.

☻

Množina $A$ je ***konečná***, pokud $|A| < \omega$. Množina $A$ je ***spočetná***, pokud $|A| \leq \omega$. Pokud $A$ není spočetná, pak je ***nespočetná***.

**Lemma 16** *Každý nekonečný kardinál je limitní ordinál.*

Důkaz:
Nechť $\kappa$ je nekonečný kardinál a pro spor předpokládejme, že $\kappa = \alpha + 1$. Protože $\alpha$ je nekonečný ordinál, pak $\alpha + 1 = \alpha$. $|\kappa| = |\alpha + 1| = |1 + \alpha| = |\alpha|$. Kdyby $\kappa = |\kappa| = |\alpha|$. Spor, $\alpha < \kappa$.

☻

### 2.2.1 Sčítání a násobení kardinálů

Jsou-li $\kappa, \lambda$ kardinály, pak

$$\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$$

$$\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$$

$\oplus, \otimes$ jsou komutativní.

**Lemma 17** *Pro $n, m \in \omega$:*

$$n \oplus n = n + m < \omega$$

$$m \otimes m = n \cdot m$$

Důkaz:
Stačí dokázat indukcí, že $n \oplus m < \omega, n \otimes w < \omega$. Zbytek plyne z lemma 9.

Obdobně $n \cdot 0 = 0 < \omega$, $n \cdot 1 = n < \omega$, $n \cdot S(m)$, $n \cdot m + m < \omega$.

☻

**Věta 8** *Je-li $\kappa$ nekonečný kardinál, pak $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.*

Důkaz:
Nechť $\kappa = \omega$. Zobrazení $f : \omega \times \omega \to \omega$ definované předpisem $f(\langle n, k \rangle) = 2^n(2 \cdot k + 1) - 1$. Toto zobrazení je prosté ale i na, takže je to bijekce.

Nechť $\kappa > \omega$. Předpokládejme, že $\omega \leq \lambda < \kappa \Rightarrow |\lambda \times \lambda| = \lambda$. Zobrazení $g : \kappa \to \kappa \times \kappa$ definované předpisem $g(\alpha) = \langle \alpha, 0 \rangle$ je prosté, tedy $\kappa \preccurlyeq \kappa \times \kappa$.

Množinu $\kappa \times \kappa$ uspořádáme ***maximo-lexikograficky***: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \kappa$ $\langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle$ jestliže $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ nebo $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ a $\langle \alpha, \beta \rangle$ je menší lexikograficky než $\langle \gamma, \delta \rangle$.

Na množině $\kappa \times \kappa$ je dobré uspořádání. Typ takové množiny je $\leq \kappa$. Důkaz sporem. Předpokládejme, že je větší. Tedy typ je $\alpha > \kappa$. Pak musí být nějaký počáteční úsek určený dvojicí $\langle \gamma, \delta \rangle$ izomorfní s $\kappa$, ale ten je díky předpokladu izomorfní s $max(\gamma, \delta)$. Spor.

Ještě důkaz předpokladu. Sporem, tedy $(\exists \lambda)\,(\omega \leq \lambda < \kappa \wedge |\lambda \times \lambda| \neq \lambda)$. Z první části je jasné, že $\lambda \neq \omega$. Tedy mějme nejmenší $\lambda_0$ pro které toto platí.

Pro $\lambda_0$, ale platí předpoklad a tedy můžeme tedy provést stejný důkaz a dostaneme $\lambda_0 \times \lambda_0 = \lambda_0$ což je spor s volbou $\lambda_0$.

☻

*Důsledek:*
Buď $\kappa, \lambda$ nekonečné kardinály. Pak $\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

## 2.3 Axiom potence

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \subseteq a \Rightarrow x \in z)$$

***Potenční množina*** množiny $a : \mathcal{P}(a) = \{x | x \subseteq a\}$.

**Věta 9 (Cantorova)** $(\forall x)(x \prec \mathcal{P}(x))$

Důkaz:
$x \preccurlyeq \mathcal{P}(x)$ – zobrazení na potenční množinu je zjevně prosté.

Že není bijekce – diagonalizací.

Buď $g : x \to \mathcal{P}(x)$ libovolné. Ukážeme, že není na. Položme $y = \{t | t \in x \wedge t \notin \mathcal{P}(x)\}$.

$y$ je množina z axiomu vydělení. $y \in \mathcal{P}(x)$ avšak $y \notin rng(g)$ (jednoduše sporem), proto $g$ není na.

☻

**Věta 10**

$$(\forall \langle \alpha, \in \rangle)(\langle \alpha, \in \rangle \ \textit{je ordinál} \ \Rightarrow (\exists \kappa)(\kappa \ \textit{kardinál} \ \wedge \kappa > \alpha))$$

Důkaz:
$\alpha < \omega$, položíme $\kappa := \omega$.

Je-li $\alpha \geq \omega : W := \{R | R \subseteq \alpha \times \alpha \wedge \langle \alpha, R \rangle$ je dobře uspořádaná $\}$.

Položme $S := \{$ typ $\langle \alpha, R \rangle | R \in W\}$.

$S$ je množina ordinálů. Předpokládejme, že $|\sup S| \leq |\alpha|$. Nemůže tam být ¡. $\sup S + 1$ má stejnou mohutnoust jako $\alpha$. Tedy $\sup S + 1 \in S$ spor.

Tudíž $|\sup S| > |\alpha| \Rightarrow \sup S > \alpha$ položme tedy $\kappa = \sup S$.

☻

Je-li $\alpha$ ordinál, $\alpha^+$ je nejmenší kardinál větší než $\alpha$. Kardinál $\kappa$ je ***následník***, pokud existuje $\alpha$, pro které je $\kappa = \alpha^+$. V opačném případě nazýváme $\kappa$ ***limitní kardinál***.

# 3 Třídy a rekurze

Je-li $\varphi(x)$ formule jazyka teorie množin, pak $\{x | \varphi(x)\}$, pokud vzniklo za pomoci axiomu vydělení pro $\varphi$ je množina.

Ale ne vždy tento zápis vede k množině (např. $\{x | x = x\}$).

Neformálně: Je-li $\varphi$ formule jazyka teorie množin, pak každý soubor tvaru $\{x; \varphi(x)\}$ budeme nazývat ***třídou***. Třída, která není množinou je ***vlastní třída***.

Formálně: Vlastní třídy neexistují. Třídový zápis budeme pouze považovat za vhodnou zkratku základního jazyka teorie množin.

Máme např. tyto třídy:

- $O_n$ – třída všech ordinálů
- $V$ – univerzální třída – všechny množiny
- $C_n$ – třída všech kardinálů

Třídové termy lze z formulí vždy eliminovat. Formálně není žádný rozdíl mezi formulí, rozdíl je jen v neformálním vyjadřování.

**Věta 11 (Metavěta: Transfinitní indukce na třídě $O_n$)** *Je-li $C \subseteq O_n$, $C \neq \emptyset$, pak $C$ má nejmenší prvek.*

Důkaz:
Jako ve větě o orginálech jen místo množiny říkat třídu.

Lze použít pro tvorbu indukce – pokud by někdy neplatilo, pak to, co neplatí má nejmenší prvek a na něm se dá utvořit spor.

☻

Použití: Dokazujeme větu typu $(\forall\alpha)\alpha$je ordinál$\Rightarrow$ $\varphi(\alpha)$. Dokážeme $\varphi(\emptyset)$ a $(\forall\beta)((\beta < \alpha \Rightarrow \psi(\beta)) \Rightarrow \psi(\alpha))$. Kdyby existovalo $\alpha \in O_n$ takové, že $\neg\psi(\alpha)$, pak si vezmeme množinu protipříkladů a ta má nejmenší prvek a spor s tím co jsme dokázali.

**Věta 12 (O transfinitní rekurzi)** *Je-li $F : V \to V$, pak existuje jediné $G : O_n \to V$, že $(\forall\alpha)(G(\alpha) = F(G \restriction \alpha)$.*

Lidsky: Ukážu na aplikaci uvedené níže. Mějme takovéto $F$: $F$ dostane funkci $f$ z nějakého ordinálu $\alpha$ do množin. Dostane-li $F$ jinou množinu vrátí naprosto cokoliv třeba identitu. Zpátky k zajímavému vstupu. $F$ zná funkční hodnoty $f$ ve všech ordinálech $\beta < \alpha$. Je-li $\alpha$ následník, $F$ vrátí $f(\alpha - 1)^+$, je-li $\alpha$ limitní ordinál $F$ vrátí suprémum z $f(\beta)$. Funkce $F$ teď definuje jakousi rekurzi. Věta říká, že tato rekurze má jediné řešení a to funkci $G$.

Důkaz:
Unicita: Nechť $G_1, G_2$ obě splňují tvrzení věty. Pak transfinitní indukcí dokážeme, že $(\forall\alpha)G_1(\alpha) = G_2(\alpha)$. $G_1(\emptyset) = F(\emptyset) = G_2(\emptyset)$. Můžeme předpokládat, že $(\forall\beta)\beta < \alpha \Rightarrow G_1(\beta) = G_2(\beta)$, t.j. $G_1 \restriction \alpha = G_2 \restriction \alpha$, tedy $G_1(\alpha) = F(G_1 \restriction \alpha) = F(G_2 \restriction \alpha) = G_2(\alpha)$ ať už je $\alpha$ následovník či limitní.

Existence: Pro každý ordinál $\delta$ nadefinujeme funkci $g_\delta : \delta \to V$ takto $(\forall\alpha)(\alpha < \delta \Rightarrow g_\delta(\alpha) = F(g_\delta \restriction \alpha))$, že taková fce existuje (je definovaná všude, kde má být) dokážeme snadno indukcí. Nyní můžeme definovat $G$ takto $G(\alpha) = g_{\alpha+1}(\alpha)$. $G$ zjevně splňuje požadavek věty.

☻

Aplikace: definece funkce aleph.

Pro ordinály $\alpha$ je formule $\aleph_\alpha (= \omega_\alpha)$ definováno transfinitní rekurzí takto: $\aleph_0 = \omega_0 = \omega, \aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$. Pro $\gamma \in O_n$ je limitní, $\aleph_\gamma = \omega_\gamma = \sup\{\omega_\beta | \beta < \gamma\}$.

**Lemma 18** 1. *Každý $\omega_\alpha$ je kardinál. $\forall\alpha \in O_n$*

2. *Každý nekonečný kardinál je roven nějakému $\omega_\alpha$.*

3. *Pro $\alpha < \beta$ je $\omega_\alpha < \omega_b$.*

4. *$\omega_\alpha$ je limitní kardinál $\Leftrightarrow$ ($\alpha$ je limitní ordinál $\vee \alpha = \emptyset$).*

5. *$\omega_\alpha$ je kardinální následník $\Leftrightarrow$ $\alpha$ je ordinální následník.*

Důkaz:
1. Opět použijeme transfinitní indukci. $\omega_0$ je kardinál, dokázáno dávno. Předpoklad: $(\forall\beta)(\beta < \alpha \Rightarrow \omega_\beta$je kardinál). Pokud $\alpha = \beta + 1$ potom $\omega_\alpha = (\omega_\beta)^+$ a to je kardinál z definice, jinak je $\alpha$. A podle jiné definice kordinálu stačí dokázat, že všechny menší ordidinály mají menší mohutnost. Zvlovne $\delta < \omega_\alpha$. Ze supréma v definici $\omega_\alpha$ platí, že $(\exists\beta < \alpha)\delta < \omega_\beta < \omega_{\beta+1} = (\omega_\beta)^+ < \omega_\alpha$. Tudíž $|\delta| \leq |\omega_\beta| < |\omega_{\beta+1}| \leq |\omega_\alpha| \Rightarrow |\delta| < |\omega_\alpha|$. Tedy $\omega_\alpha$ je tedy kardinál.

2. Buď $\kappa$ nekoneční kardinál, $\kappa > \omega$, jinak triv. Definujme $M = \{\beta|\beta$je ordinál $\wedge\, \omega_\beta < \kappa\}$. $M \neq \emptyset$ jelikož $\emptyset \in M$. Položme $\gamma = supM$.

$\gamma \in M$, pak $\kappa < \omega_\gamma$ a $\kappa \leq \omega_{\gamma+1}$. Jelikož $\kappa$ je taky ordinál je $\kappa = \omega_{\gamma+1}$

$\gamma \notin M$, pak $\gamma$ je limitní ordinál. ($\omega_\gamma = sup\{\omega_\beta|\beta < \gamma\}$ a $\kappa > \omega_\beta$ pro $\beta < \gamma) \Rightarrow \kappa \geq \omega_\gamma$. Zároveň $\neg(\kappa > \omega_\gamma)$, protože pak by $\gamma \in M$. Tedy $\omega_\gamma = \kappa$.

3. $\alpha < \beta \Rightarrow \omega_\alpha < \omega_{\alpha+1} \leq \omega_\beta \Rightarrow \omega_\alpha < \omega_\beta$.

5. "$\Leftarrow$"$\alpha = \beta + 1$ tedy $\omega_\alpha = (\omega_\beta)^+$ tedy $\omega_\alpha$ je kardinální následník.

"$\Rightarrow$"$(\exists\beta$ordinál$)\omega_\alpha = \beta^+$. $\beta$ dobře uspořádaná $\Rightarrow$ $(\exists\kappa)$ kardinál, že $\omega_\alpha = \kappa^+$. Podle 2. $(\exists\gamma)\kappa = \omega_\gamma$. Tedy $\omega_{\gamma+1} = (\omega_\gamma)^+ = \kappa^+ = \omega_\alpha$. Podle 3. $\gamma + 1 = \alpha$ a tedy $\alpha$ je ordinální následník.

4. Komplement 5.

☻

# 4 Axiom výběru

Nechť $a$ je množina, $\langle x_t | t \in a\rangle$ je soubor množin (všechny funkční hodnoty funkce pro $t$). ***Kartézským součinem*** nazveme množinu $\prod_{t\in a} x_t = \{f|f$ je funkce $, dom(f) = a \wedge (\forall t)\, t \in a \Rightarrow f(t) \in x_t\}$.

Množina $r$ je ***rozkladem*** množiny $x$, jestliže $x = \bigcup r, \emptyset \notin r, (\forall u, v)(u \in r \wedge v \in r \Rightarrow u \cap v = \emptyset \vee u = v)$.

*Princip výběru:*
Pro každý rozklad $r$ množiny $x$ existuje množina $y \subseteq x$, pro které platí

$(\forall u \in r)(\exists t \in x)(y \cap u = \{t\})$. Tedy z každé množiny rozkladu lze vybrat prvek a složit z nich množinu.

Funkce $f : x \to \bigcup x$ definovaná na množině $x$, která splňuje $(y \in x \wedge y \neq \emptyset) \Rightarrow f(y) \in y$, se nazývá ***selektor*** na množině $x$.

*Axiom výběru:*
Na každé neprázdné množině existuje selektor.

**Lemma**:
Následující tvrzení jsou exvivalentní:

1. Axiom výběru
2. Princip výběru
3. Pro každou relaci $s$ existuje funkce $f$ taková, že $f \subseteq s \wedge dom(f) = dom(s)$.
4. Je-li $x \neq \emptyset$ a pro všechna $t \in x$ je $y_t \neq \emptyset$, pak $\prod_{t \in x} y_t \neq \emptyset$

Důkaz:
1. $\to$ 2.: Buď $r$ rozklad množiny $a$. Podle 1. existuje selektor. Z toho se dá odvodit výběrová množina rozkladu $r$.

2. $\to$ 3.: Mějme relaci $s$ a předpokládejme, že je neprázdná. Položme $r = \{\{\langle u, v\rangle \mid \langle u, v\rangle \in s\} \mid u \in dom(s)\}$. Zřejmě platí, že $r$ je rozkladem množiny $s$. Dle principu výběru existuje výběrová množina. Kdykoliv je $u$ v definičním oboru $s$, pak $y \cap \{\langle u, v\rangle \mid \langle u, v\rangle \in s\}$ v jediném bodě, $f$ je tedy funkce, $f \subseteq s$, $dom(s) = dom(f)$.

3. $\to$ 4.: Mějme kartézský součin. Nechť $x \neq \emptyset$ a nechť $(\forall t \in x)$ je $y \neq \emptyset$. $\bigcup \{y_t | t \in x\}$

***`TODO: Nechybí tu index`***

Definujme relaci $s \subseteq x \times \bigcup \{y_t ; t \in x\}$ předpisem $s = \{\langle t, v\rangle ; t \in x, v \in y_t\}$. Podle 3. existuje $f \subseteq s$, $f$ je funkce, $dom(y) = dom(s) = x$. Pro každé $t \in x$ je $\langle t, f(t)\rangle \in s$, $f(t) \in y_t$, $f \in \prod_{t \in x} y_t$.

4. $\to$ 1.: Buď $x \neq \emptyset$ množina. Dále předpokládejme, že $\emptyset \neq x$ (takové případy jsou nezajímavé). Kartézský součin $\prod_{z \in x} z$ je podle 4. neprázdný. Nechť $f$ je prvek kartézského součinu $y \in \prod_{z \in x}$. Podle definice kartézského součinu pro každé $z \in x$ je $f(z) \in z$ tedy $f$ je selektor množině $x$.

Buď $\langle a, \leq\rangle$ uspořádaná množina, $c \subseteq a$. Množina $c$ nazveme ***řetězcem***, pokud je $c$ uspořádané dle $\leq$ uspořádáno lineárně.

Nechť $\langle a, \leq\rangle$ je uspořádaná množina, $d \subseteq a$. Pak prvek $x \in a$ se nazývá ***horní mezí*** množiny $d$, jestliže $(\forall y \in d)(y \leq x)$. Prvek $x$ se nazývá ***ma-***

***ximálním prvkem*** množiny $d$, jestliže $x \in d$ a současně $(\forall y \in d)(y \neq x)\neg(y > x)$.

**Lemma** (Princip maximality (Zornovo lemma, Zornovo-Kuratovského lemma)):
Nechť $\langle a, \leq \rangle$ je uspořádaná množina taková, že každý řetězec v $a$ má horní mez. Pak $(\forall x \in a)(\exists m \in a)(m$ je maximální prvek množiny $x \wedge \leq m$. `TODO: Tohle vypadá divně.` Lze dokázat, že je ekvivalentní s axiomem výběru.

**Princip dobrého uspořádání (Zermelova věta)**:
Na každé množině $m$ existuje relace $r$, že $\langle m, r \rangle$ je dobře uspořádaná.

**Věta**:
Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Axiom výběru
2. Princip maximality
3. Princip dobrého uspořádání

Důkaz:
1. – 3. Mám množinu $m = \emptyset$, položíme $r = \emptyset$. Nadále $m \neq \emptyset$, uvažujme $b := \mathcal{P}(m) \setminus \{\emptyset\}$. Podle 1. musí existovat selektor na $b$, to znamená, že $(\forall z)(\subseteq m, z \neq 0)$ pak $f(z) = z$. Budeme hledat prosté zobrazení z nějakého ordinálu $\alpha$ na množinu $m$.

Transfinitní indukcí. $g(0) = f(m)$. Mějme $\gamma$ ordinál a známe $g \restriction \gamma$. $m \setminus \{g(\beta) | \beta < \gamma)\}$. Pokud je tato množina prázdná, pak $\gamma$ je hledané $\alpha$. Pokud je neprázdná, pak definujme $g(\gamma) = f(m \setminus \{g(\beta) | \beta < \gamma\})$ (najdeme další bod z množiny). Protože $m$ je množina, musí existovat $\alpha$, tedy indukce musí skončit.

*Důsledek:*
Pokud předpokládám axiom výběru:

- Pro libovolnou množinu $A$, $|A|$ existuje. (Axiom výběru říká, že ji lze dobře uspořádat, proto může mít svoji mohutnost.)
- Je-li $A$ nekonečná, pak $A \approx A \times A \approx A \times \{0, 1\}$.
- Každou nekonečnou množinu lze rozložit na nekonečně mnoho nekonečných částí.
- Pokud $A, B$ jsou množiny a existuje surjektivní $f : A \to B$, pak $B \preccurlyeq A$. Toto zobrazení definuje rozklad množiny $A$.

Jsou li $A, B$ množiny, budeme značit ${}^{A}B = \{f | f \text{ je funkce } \wedge f : A \to B\}$.

Pro kardinály $\kappa, \lambda$ mocnina $\kappa^{\lambda} = \left|{}^{\lambda}\kappa\right|$.

*Pozorování:*
Nechť $\kappa \geq \omega$, potom pro všechna $n \in \omega, n \neq 0; \kappa^n = \kappa$.

**Věta**:
Buď $\kappa, \lambda$ kardinály, $\kappa \geq 2, \lambda \geq \omega, \kappa \leq \lambda$. Potom $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

Důkaz:
${}^\lambda 2 = \{f : f : \lambda \to 2\} \subseteq \{f : f : \lambda \to \kappa\} =^\lambda \kappa$.

*`TODO: Hop`* Pro $M \subseteq \lambda$ definuji $\chi(M) : \lambda \to 2$ předpisem $\chi(M)(\xi) = 0$ pokud $\xi \notin M$, jinak 1. Zřejmě je $\chi : \mathcal{P}(M) \to^\lambda 2$.

*Pozorování:*
Buď $A, B, C$ množiny, neprázdné.

$${}^C\left({}^B A\right) \approx^{C \times B} A$$

Jsou-li $B, C$ disjunktní, pak:

$${}^B A \times^C A \approx^{B \cup C} A$$

*Důsledek:*
$\kappa, \lambda, \mu$ kardinály, pak:

$$\left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$$

$$\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$$

Důkaz:
Je-li $f \in^C \left({}^B A\right)$, pro každé $c \in C$ je $f(c) \in^B A$. Tedy $f(c)$ je funkce, pro $(\forall b \in B)(f(c)(b) \in A)$.

Je-li $g \in^{C \times B} A \wedge g$ je funkcne, kdykoliv $\langle c, b\rangle \in C \times B \wedge g(c, b) \in A$.

Položíme $\psi;^C \left({}^B A\right) \to^{C \times B} A, \psi(y) = g$. Toto zobrazení je bijekce.

Druhé tvrzení je zřejmé, přes definici.

Buďte $\alpha, \beta$ ordinály, $f : \alpha \to \beta$. Řekneme, že $f$ zobrazuje $\alpha$ do $\beta$ ***kofinálně*** ($f$ je ***kofinální zobrazení***), jestliže $(\forall \eta \in \beta)(\exists \xi \in \alpha)(\eta \leq y(\xi))$. Zřejmě pro $\alpha = \beta$ a $f = id$ platí, takže množina takových zobrazení je neprázdná.

Je-li $\beta$ ordinál, pak ***kofinalita*** $\beta$ ($cf(\beta)$) je nejmenší ordinál $\alpha$ takový, že existuje kofinální zobrazení $f : \alpha \to \beta$.

$cf(\beta) \leq \beta$, $\beta$ je ordinální následník $\beta = \gamma + 1$ a zobrazení $1 \to \beta, f(0) = \gamma, cf(\beta) = 1$.

**Lemma** (16):
Existuje kofinální zobrazení $f : cf(\beta) \to \beta$, které je ostře rostoucí.

Důkaz:
Pokud $\beta$ je ordinální následník, pak je to nezajímavé.

Nechť je tedy $\beta$ limitní ordinál. Zvolme $g : cf(\beta) \to \beta$ libovolné kofinální zobrazení. Definujme transfinitní indukcí $f(0) = g(0), \xi < cf(\beta)$ známe $f(\eta)$ pro všechny $\eta < \xi$, $f(\xi) = \sup(\{f(\eta), g(\eta)|\eta < \xi\} \cup \{g(\xi)\}) + 1$. $f(\xi) < \beta$.

Je-li $\eta < \xi < cf(\beta), f(\eta) < f(\xi)$. $f$ je tedy ostře rostoucí. Kdykoliv $\zeta < \beta(\exists\xi)(\xi \leq g(\xi))$ protože je kofinální, $\zeta \leq g(\xi) < f(\xi)$.

**Lemma** (17):
Buďte $\alpha, \beta$ ordinály, nechť existuje kofinální ostře rostoucí zobrazení $f : \alpha \to \beta$.

Potom $cf(\alpha) = cf(\beta)$.

Důkaz:
Podle předpokladu existuje ostře rostoucí kofinální zobrazení $g : cf(\alpha) \to \alpha$. Zobrazení $f \circ g : cf(\alpha) \to \beta$ je ostře rostoucí kofinální zobrazení z $cf(\alpha) \to \beta$, tedy $cf(\beta) \leq cf(\alpha)$.

Existuje $h : cf(\beta) \to \beta$ ostře rostoucí kofinální zobrazení. Definujme zobrazení $i : cf(\beta) \to \alpha$ následujícím způsobem. $i(\xi)$ budiž vzor zobrazení $f(\min\{f(\iota); f(\iota) > g(\xi)\})$. $i$ je zobrazení z $cf(\beta) \to \alpha$, je kofinální, $cf(\alpha) \leq cf(\beta)$, tedy se musejí rovnat.

*Důsledek:*

$$(\forall\beta)\,(cf(cf(\beta)) = cf(\beta))$$

**Lemma** (18):
Pro každý limitní ordinál $\beta$, $cf(\beta)$ je kardinál.

Důkaz:
Sporem. Nechť $|cf(\beta)| \leq cf(\beta)$. Máme bijekci $f : |cf(\beta)| \to cf(\beta)$. Mějme $g : cf(\beta) \to \beta$ kofinální zobrazení. $g \circ f : |cf(\beta)| \to \beta$ je kofinální zobrazení. Spor s kofinalitou (menší ordinál, ze kterého to jde).

*Definice:*
Kardinál $\kappa$ je ***regulární***, je-li $cf(\kappa) = \kappa$. Pokud $cf(\kappa) < \kappa$, říkáme, že $\kappa$ je ***singulární***.

**Lemma** (19):
$\omega$ je regulární kardinál.

**Lemma** (20):
Je-li $\kappa \geq \omega$ kardinál, pak $\kappa^+$ je regulární.

Důkaz:
Sporem. Nechť $cf(\kappa^+) < \kappa^+$. $cf(\kappa^+) \leq \kappa$. Máme $f : cf(\kappa^+) \to \kappa^+$ ostře rostoucí kofinální zobrazení. $f(\xi)$ je nějaký ordinál menší než $\kappa^+$, $|f(\xi)| \leq \kappa$, neboť $f(\xi) < \kappa^+ - \xi < cf(\kappa^+)$.

$$\kappa^+ = \bigcup_{\xi < cf(\kappa^+)} f(\xi), \left| \bigcup_{\xi < cf(\kappa^+)} f(\xi) \right| \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$$

(Potřebuji axiom výběru.)

**Lemma** (21):
Je-li $\alpha$ limitní ordinál, pak $cf(\omega_\alpha) = cf(\alpha)$. (Plyne z lemmatu 17)

**Lemma** (22 - Königovo):
Předpokládáme axiom výběru. Nechť $\kappa, \lambda$ jsou kardinály, $\kappa \geq \omega, \lambda \geq cf(\kappa)$. Potom $\kappa^\lambda > \kappa$.

Důkaz:
Stačí dokázat pro $\lambda = cf(\kappa)$, neboť $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \kappa^\lambda \leq \kappa^{\lambda'}$. Buď $f : \kappa \to^\lambda \kappa$, stačí dokázat, že $f$ nemůže být na.

Protože $\lambda = cf(\kappa)$, můžeme vzít ostře rostoucí kofinální zobrazení $h : \lambda \to \kappa$. Pro $g \in sug(f)$ označme $g = g_\alpha$, pokud $g = f(\alpha)$. Je-li $\xi < \lambda$. Potom $h(\xi) < \kappa$. Uvažujme množinu $\{g_\alpha(\xi) | \alpha < h(\xi)\}$.

$$F(\xi) = \min\left(\kappa \setminus \{g_\alpha(\xi) | \alpha < h(\xi)\}\right)$$

$F$ je zobrazení z $\lambda$ do $\kappa$, $F \notin sug(f)$.

Zvolme libovolně $\alpha < \kappa$, existuje $\xi \in \lambda$ tak, že $h(\xi) > \alpha$. Podle definice $F$:

$$F(\xi) \notin \{g_\beta(\xi) | \beta < h(\xi)\} \Rightarrow F(\xi) \neq g_\alpha(\xi) \wedge F \neq g_\alpha$$

*Důsledek:*
Předpokládáme axiom výběru. Je-li $\lambda \geq \omega$ kardinál, potom $cf(2^\lambda) > \lambda$.

Důkaz:
Položme $\kappa = 2^\lambda$. $\kappa^\lambda = (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\lambda = \kappa$. Kdyby platilo, že $cf(2^\lambda) \leq \lambda$, pak $cf(\kappa) \leq \lambda$, podle lemmatu 22 pak je $\kappa^\lambda > \kappa$, což je spor.

***Hypotéza kontinua*** je tvrzení $2^\omega = \omega_1$. ***Zobecněná hypotéza kontinua*** je tvrzení $(\forall \alpha) 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$.

Ani tato tvrzení, ani jejich negace nejsou ve sporu s teorií množin.

**Lemma** (23):
Předpokládáme axiom výběru a zobecněnou hypotézu kontinu, $\kappa, \lambda \geq 2$ kardinály, alespoň jeden z nich nekonečný. Pak platí:

1. Je-li $\kappa \leq \lambda$, pak $k^{\lambda} = \lambda^{+}$
2. Je-li $cf(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$, pak $\kappa^{\lambda} = \kappa^{+}$.
3. Je-li $\lambda < cf(\kappa)$, pak $\kappa^{\lambda} = \kappa$

Důkaz:
1. $\kappa \leq \lambda, \kappa \geq 2, \kappa^{\lambda} = 2^{\lambda} = \lambda^{+}$.

2. Je-li $cf(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$, podle lemmatu 22 $\kappa < \kappa^{\lambda}$, tedy $\kappa^{\kappa} = 2^{\kappa} = \kappa^{+} \geq \kappa^{\lambda} \geq \kappa^{+}$.

3. $\lambda < cf(\kappa),^{\lambda} \kappa$. Je-li $f \in^{\lambda} \kappa$, pak $f$ není kofinální, tedy existuje $\alpha < \kappa, f \in^{\lambda} \alpha$.

$$^{\lambda}\kappa = \bigcup_{a \in \kappa}^{\lambda} \kappa$$

$$\kappa \leq \kappa^{\lambda} = \left|^{\lambda}\kappa\right| \leq \kappa \otimes \left|^{\max\{\lambda,\alpha\}} \max\{\lambda, \alpha\}\right| \leq \kappa \otimes 2^{|\max\{\lambda,\alpha\}|} = \kappa \otimes |\max\{\lambda, \alpha\}|^{+} \leq \kappa$$

*Definice:*
Předpokládám axiom výběru. Buď $I \neq \emptyset$ indexová množina. Prokazdé $i \in I$ buď $\kappa_i$ kardinální číslo. Definujme:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \kappa_i &= \left|\bigcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\}\right| \\ \prod_{i \in I} \kappa_i &= \left|\prod_{i \in I} \kappa_i\right| \end{aligned}$$

**Königova nerovnost**:
Předpokládám axiom výběru. Je-li $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ jsou $\kappa_i, \lambda_i$ kardinální čísla a $\kappa_i < \lambda_i$, pak $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$.

**Hausdorfova formule**:
Předpokládám axiom výběru. Jsou li $\kappa, \lambda$ nekonečné kardinály, pak $(\kappa^{+})^{\lambda} = \kappa^{+} \otimes \kappa^{\lambda}$.

Důkaz:

$$\kappa^{+} \otimes \kappa^{\lambda} \leq \left(\kappa^{+}\right)^{\lambda} \otimes \left(\kappa^{+}\right)^{\lambda} = \left(\kappa^{+}\right)^{\lambda}$$

K důkazu opačné nerovnosti: Dva případy.

- $\lambda \geq \kappa^{+}$. Potom $(\kappa^{+})^{\lambda} \leq \lambda^{\lambda} = 2^{\lambda} = \kappa^{\lambda} \leq (\kappa^{+}) \otimes \kappa^{\lambda}$.

- $\lambda < \kappa^+$. Víme, že $\kappa^+$ je regulární kardinál, $f : \lambda \to \kappa^+$, pak existuje $\alpha < \kappa^+; f : \lambda \to \alpha$ ($f$ není kofinální).

$$\left|{}^{\lambda}\kappa^+\right| = \left|\bigcup_{\alpha \in \kappa^\lambda}^{\lambda} \alpha\right| \leq \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$$

.

# 5 Nekonečná kombinatorika

Všude předpokládáme axiom výběru (i když to nebude explicitně uvedeno).

Mějme soubor množin $A = \langle A_i; i \in I\rangle$.

***Částečný selektor*** je funkce definovaná na některých $i$ a vybírá si vždy některou hodnotu z příslušného $A_i$ ($f, dom(f) \subseteq I, f(i) \in A_i$).

Buď $S$ množina částečných selektorů souboru $A$. Říkáme, že $S$ ***pokrývá konečné podmnožiny množiny*** $I$, jestliže pro každou konečnou $u \subseteq I$ existuje $f \in S$, že $u \subseteq dom(f)$.

Zobrazení $g$ se nazývá ***filtrovaným prodloužením*** množiny částečných selektorů $S$, je-li $dom(g) = I$ a pro ($\forall u \subseteq I, u$ konečná )$(\exists f \in S) f \restriction u = g \restriction u$.

**Princip kompaktnosti**:
Je-li $A = \langle A_i | i \in I\rangle$ soubor konečných množin, pak každý systém částečných selektorů, který pokrývá konečné podmnožiny množiny $I$, má filtrované prodloužení.

Důkaz:
Mějme $S$ soubor částečných selektorů, který pokrývá všechny konečné podmnožiny množiny $I$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro každý částečný selektor $f \in S$ je $dom(f)$ konečná množina.

$$Z = \{g | dom(g) \subseteq I \wedge i \in dom(g) \Rightarrow g(i) \in A_i \wedge (\forall u \subseteq dom(g)); (u \text{ konečná})$$
$$\{f \in S | f \restriction u = g \restriction u\} \text{ pokrývá konečné podmnožiny množiny } I\}$$

A poté vezmeme $(Z, \subseteq)$.

Buď $L \subseteq Z$ řetězec v $(Z, \subseteq)$, $\tilde{g} = \bigcup L$. $\tilde{g}$ je funkce – kdykoliv $i \in dom(\tilde{g})$, pak $\exists g \in L, i \in dom(g), \tilde{g}(i) = g(i)$. Na volbě $g$ nezáleží, protože $L$ je lineárně uspořádané, tak $g \subseteq g' \vee g' \subseteq g$, proto jsou v $i$ stejné.

Zřejmě pro $g \in L$ je $\tilde{g}$ horní mezí $L$.

Zbývá ověřit, že $\tilde{g} \in Z$. Buď $u$ konečná, $u \subseteq dom(\tilde{g})$. Pro každé $i \in u$ existuje $g_i \in L$, že $i \in dom(g_i)$. Když $i \neq j, i, j \in u$, pak $g_i \subseteq g_j \vee g_j \subseteq g_i$, tedy v jednom z nich jsou oba.

Lze rozšířit na další počty indexů.

Existuje $g \in L$, že $u \subseteq dom(g)$. Máme $g \in Z$, tedy $\{f \in S; f \restriction u = g \restriction u\}$ pokrývá všechny konečné podmnožiny $I$, $\tilde{g} \restriction u = g \restriction u$, dostáváme $\tilde{g} \in Z$.

Podle principu maximality $Z$ obsahuje maximální prvek $h$. Kdykoliv $u \subseteq dom(h)$, $u$ konečná $\{f \in S | f \restriction u = h \restriction u\}$ pokrývá všechny konečné podmnožiny množiny $I$, tedy je neprázdná, tedy $(\exists f \in S)(f \restriction u = h \restriction u)$. Zbývá ověřit, že $dom(h) = I$.

$dom(h) = I$. Sporem. Buď $i_0 \in I$ takové, že $i_0 \notin dom(h)$. $A_{i_0}$ je konečná, tedy $A_{i_0} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Protože $h$ je maximální prvek množiny $Z$, $h$ nelze prodloužit na $I \cup \{i_0\}$. Tedy pro každou funkci $h_j = h \cup \{\langle i_0, a_j \rangle\}$ máme $h_j \notin Z$. $(\forall j)(\exists u_i$ konečná $)(u_i \subseteq dom(h_j)$, pro kterou platí, že $\{f \in S | f \restriction u_j = h_j \restriction u_j\}$ nepokrývá konečné podmnožiny $I$. Tedy pro každé $j$ existuje konečná množina $v_j \subseteq I$, která splňuje: Kdykoliv $f \in S$ taková, $f \restriction u_j = g \restriction u_j$, pak $v_j \not\subseteq dom(f)$.

Protože $h \in Z$, $h_j \notin Z$, musí platit, že $i_0 \in u_j$.

$$w := \bigcup_{j=0}^{k} u_j \cup \bigcup_{j=0}^{k} v_j \setminus \{i_0\} \subseteq dom(h)$$

Tato stále pokrývá všechny konečné podmnožiny množiny $I$.

$\{f \in S | f \restriction w = h \restriction w\}$ pokrývá všechny konečné podmnožiny $I$. Tedy tato množina také obsahuje $f$, pro kterou $dom(f) = w \cup \{i_0\}$, tedy máme $\exists y \in S; w \cup \{i_0\} \subseteq dom(f), f \restriction w = h \restriction w, f(i_0) = a_j$ pro vhodné $j$, což je spor.

**Lemma** (O třech množinách):
Nechť $f : M \to M$ je takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \neq x$. Pak $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pro všechny $i \in \{0, 1, 2\}$ ; $f[M_i] \cap M_i = 0$.

Důkaz:
Vezmeme $g : M \to \{0, 1, 2\}$. Buď $S$ soubor částečných selektorů, které splňují, že pro každé $\forall x \in dom(g); g(f(x)) \neq g(x)$.

Pokud $S$ pokrývá konečné podmnožiny množiny $M$, aplikujeme princip kompaktnosti, máme filtrované prodloužení $h$. Použiji tyto selektory.

Buď $u \subseteq M$ konečná, potřebujeme najít $g \in S$, že $u \subseteq dom(g)$. Indukcí podle $|u|$. Když je $|u| \leq 2$ je zřejmé. Nechť existuje $g \in S$ pro $u \subseteq M, |u| = n$. Mějme $u \in S, |u| = u + 1$.

Dvě možnosti: $f[u] \neq u$. V tom případě existuje $a \in u \setminus f[u]$. Z indukčního předpokladu máme $g \in S$, že $dom(g) = u \setminus \{a\}$. Známe $g(f(a)) \in \{0,1,2\}$. Zvolme $j \in \{0,1,2\} \setminus g(f(a))$ a položme $g' \cup \{\langle a, j \rangle\}, g' \in S$.

Protože $u$ je konečná, pak $f$ musí být prosté. Zvolme $a \in u$ libovolně, z indukčního předpokladu máme $g \in S, dom(g) = u \setminus \{a\}$. Jeden bod $x$ se zobrazuje na $a$ a $a$ se zobrazuje na jeden bod $y$.

Definujme $g' : u \to \{0,1,2\}$ přepisem $g' = g \cup \{a, j\}$ pro $j \in \{0,1,2\} \setminus \{g(x), g(y)\}$.

**Lemma** (O disjunktním zjemnění):
Buď $\kappa$ nekonečný kardinál, buďte $\langle A_\alpha, \alpha \in \kappa \rangle$ množiny, pro každé $\alpha \in \kappa; |A_\alpha| = \kappa$. Pak existuje soubor $\{B_\alpha; \alpha \in \kappa\}$ tak, že:

1. $(\forall \alpha \in \kappa)|B_\alpha| = \kappa$
2. $\alpha \neq \beta \Rightarrow B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$
3. $(\forall \alpha \in \kappa) B_\alpha \subseteq A_\alpha$

Důkaz:
Transfinitní indukcí do $\kappa$. Zvolme bod $x(0,0) \in A_0$. Indukční krok: mějme $\gamma < \kappa$ a předpokládejme, že pro každé $\alpha < \beta < \kappa$ známe body $x(\alpha, \beta)$, přičemž platí, že $x(\alpha, \beta) \in A_\alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle \neq \langle \alpha', \beta' \rangle \Rightarrow x(\alpha, \beta) \neq x(\alpha', \beta')$.

$x(\alpha, \gamma) =?$. `TODO: Coto?` $A_0, |A_0| = \kappa$, $|\{x(\alpha, \beta|\alpha < \beta < \gamma\}| \leq |\gamma| \cdot |\gamma| < \kappa$. Zvolme $x(0, \gamma) \in A \setminus \{x(\alpha, \beta|\alpha < \beta < \gamma\}$.

Dále $x(\alpha, \beta) \in A_\alpha \setminus (\{x(\alpha', \beta)|\alpha' < \beta < \gamma\} \cup \{x(\alpha', \gamma)|\alpha' \in \alpha\})$. Buď $\beta_\alpha = \{x(x, \beta)|\alpha \leq \beta < \kappa\}$.

**Lemma** (O $\Delta$-systému):

Systém množin $\mathcal{A}$ se nazývá ***$\Delta$-systém***, jestliže $\exists$ množina $K$ taková, že $\forall A_0, A_1 \in \mathcal{A}, A_0 \neq A_1 \Rightarrow A_0 \cap A_1 = K$. $K$ se nazývá ***jádro*** $\Delta$-systému $\mathcal{A}$.

Nechť $\mathcal{A}$ je nespočetný systém konečných množin, $|\mathcal{A}|$ je regulární kardinál.

Pak existuje $\Delta$-systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$.

*Poznámka:*
Kdyby spočetná: tak $A_n = n$, to nejde.

Důkaz:
Indukcí podle $n$. $n = 1 \Rightarrow Ac$ sestává jen ze samých jednobodových množin, nemusím nic vybírat.

Indukční krok. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ zvol $x(A) \in A$. Nechť $\mathcal{A}' = \{A \in x(A)|A \in \mathcal{A}\}$. Podle indukčního předpokladu existuje $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}', |\mathcal{B}'| = |\mathcal{A}'|$ a $\mathcal{B}'$ je $\Delta$-systém s jádrem $K$.

Dvě možnosti:

- $\exists y$ tak, že $|\{A \in \mathcal{A} | x(A) = y \wedge A \setminus \{x(A)\} \in \mathcal{B}'\}| = |\mathcal{A}|$. Položme $K' = K \cup \{y\}$.
- $(\forall y)(|\{A | A \in \mathcal{A} \wedge A \setminus \{x(A)\} \in \mathcal{B}' \wedge x(A) = y\}| < |\mathcal{A}|)$ Existuje množina $\{y_\alpha | \alpha < |\mathcal{A}|\}$ tak, že $\{A \in \mathcal{A} : A \setminus \{x(A)\} \in \mathcal{B}' \wedge x(A) = y_a\}, |\mathcal{A}_\alpha| < |\mathcal{A}|$. Pro každé $\alpha$ zvolíme jednu množinu $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, tedy $\{A_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}|\} = \mathcal{B}$ je $\Delta$-systém s jádrem $K$.

# 6 Stacionární množiny

Buď $\delta$ limitní ordinál. Říkáme, že $A \subseteq \delta$ je ***neomezená***, jestliže $(\forall \alpha < \delta)(\exists \beta \in A)(\alpha < \beta)$. Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je ***uzavřená*** $\delta$, jestliže pro každé $\alpha < \delta, \alpha$ limitní platí $\sup(A \cap \alpha) \Rightarrow \alpha \in A$. Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je ***uzavřená, neomezená***, jestliže je současně uzavřená a neomezená.

**Lemma**:
Nechť $\delta$ je limitní ordinál, $cf(\delta) > \omega$. Je-li $\tau < cf(\delta)$ a $\{C_\xi | \xi < \tau\}$ soubor uzavřených neomezených množin v $\delta$, pak $C := \bigcap \{C_\xi | \xi < \tau\}$ je uzavřená neomezená v $\delta$.

Důkaz:

Mějme $\alpha$ limitní, $\alpha < \delta$, nechť $\alpha = \sup(C \cap \alpha)$. Je-li $\xi < \tau$ libovolné, $C \subseteq C_\xi$, tedy $C \cap \alpha \subseteq C_\xi \cap \alpha$. $C_\xi$ uzavřená, tedy $\alpha \in C_\xi$. $\alpha \in \bigcap_{\xi \in \tau} C_\xi = C$.

Buď $\alpha < \delta$ libovolné. Každá množina $C_\xi$ je neomezené, tedy existuje $\alpha^0_\xi$, že $\alpha < \alpha_0$. $\left|\left\{\alpha^0_\xi | \xi < \tau\right\}\right| \leq \tau < cf(\delta)$. Tedy, množina $\left\{\alpha^0_\xi | \xi < \tau\right\}$ není kofinální v $\delta$, existuje $\alpha_1 < \delta; \alpha^0_\xi < \alpha_1$.

Dál indukcí najdeme $\alpha^n_\xi \in C_\xi, \alpha_n < \alpha^n_\xi < \alpha_{n+1}$. $cf(\delta) > \omega$, tedy $\sup\{\alpha_n | n \in \omega\} = \gamma < \delta$. Kdykoliv je $\xi \in \tau$, kdykoliv $\beta < \gamma (\exists n)(\beta < \alpha_n < \alpha^n_\xi \in C_\xi)$. Tedy $\gamma = sup(C_\xi \cap \gamma)$. $C_\xi$ je uzavřená, tedy $\gamma \in C_\xi$ pro všechna $\xi$, proto je i v $C$, $\gamma > \alpha$, množina $C$ je neomezená v $\delta$.

Buď $\delta$ kardinál, $cf(\delta) > \omega, S \subseteq \delta$. Řekneme, že že množina $S$ je ***stacionární v*** $\delta$, jestliže pro každou $C \subseteq \delta$, $C$ uzavřená neomezená v $\delta$ platí, že $S \cap C \neq \emptyset$.

Buď $\kappa$ kardinál, $\langle A_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ soubor podmnožin kardinálu $\kappa$. Množina $\Delta A_\alpha = \{\gamma < \kappa | (\forall \alpha < \gamma)(\gamma \in A_\alpha)\}$. Tato množina se nazývá ***diagonálním průnikem*** tohoto souboru.

**Lemma**:

$$\Delta A_\alpha = \bigcap \{A_\alpha \cup (\alpha + 1) : \alpha \in \kappa\}$$

Důkaz:
Buď $\gamma \in \Delta A_\alpha$. Kdykoliv $\alpha < \gamma$, pak $\gamma \in A_\alpha \subseteq A_\alpha \cup (\alpha + 1)$. Je-li $\alpha \geq \gamma$, pak $\gamma \in a + 1 \subseteq A_\alpha \cup (\alpha + 1)$, tedy $\gamma \in \bigcap_{\alpha < \kappa} A_\alpha \cup (\alpha + 1)$.

Buď $\gamma \in \bigcap_{\alpha \in \kappa} A_\alpha \cup (\alpha + 1)$. Je-li $\alpha < \gamma$, pak $\gamma \in A_\alpha \cup (\alpha + 1)$, protože $\gamma > \alpha, \gamma \notin \alpha + 1$ máme $\gamma \in A_\alpha : \gamma \in \Delta A_\alpha$.

**Lemma**:
Nechť $\kappa > \omega$ regulání kardinál, $\langle C_\alpha | \alpha \in \kappa \rangle$ soubor množin uzavřených neomezených v $\kappa$. Pak $\Delta C_\alpha$ je uzavřená neomezená v $\kappa$.

**Ramseova**:
Pro každé přirozené $n, k$, $\omega \to (\omega)^n_k$. Tedy, kdykoliv $f : [\omega]^n \to k$, pak existuje nějaká $H \subseteq \omega, |H| = \omega$, tak, že $f \restriction [H]^n$ je konstantní.

Důkaz:
Indukcí dle $n$. $n = 1$, tedy $f : [w]^1 \to k$, triviální.

**Věta**:
Pro každé přirozené $r, n, k$ existuje přirozené $N$, že $N \to (r)^n_k$.

## 7 Axiom regularity/fundovanosti

$$(\forall a)(a \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge a \cap x = 0))$$

Pro každý ordinál $\alpha$ definujme množinu $V_\alpha$ transfinitní rekurzí takto: $V_0 = 0$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, $V_\alpha = \bigcup \{V_\beta; \beta < \alpha\}$ pro limitní $\alpha$.

**Lemma**:
Pro každý ordinál platí:

- $V_\alpha$ je transitivní množina.
- Je-li $\beta < \alpha$, pak $V_\beta \subseteq V_\alpha$.

$V_0$ je tranzitivní, dále transfinitní indukcí.

**Věta**:
Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Axiom fundovanosti
- $V = \bigcup \{V_\alpha | \alpha \in On\}$

Důkaz:
Zleva doprava zřejmě platí, že universum to obsahuje. Sporem. Nechť $x$

je množina a není v $\bigcup\{V_\alpha\}$. Pro tuto množinu $x$ nemůže platit implikace $x \neq 0 \rightarrow (\forall y \in x) \in \bigcup\{V_\alpha\}$.